

כדורסל – חלק ג - פרבולה בשירות הכדורסלנים



אשכול ג מתוך 3 אשכולות. ניתן לפתור כל אשכול בנפרד.
אשכול זה עוסק במתמטיקה שימושית. באשכול מודגמות סיטואציות מעולם הכדורסל ומועלות שאלות אודות הכניסה של הכדור לסל, הגובה המקסימלי אליו יכול הכדור להגיע ומצבים שונים של מסלול הכדור בדרכו אל הסל.

ספורט	יחידה
ט'	כיתה מומלצת
45 דקות	משך הזמן המומלץ
ספורט וחברה.	נושאים/מושגים חוץ מתמטיים הנלמדים באשכול (קונטקסט)
היכרות עם ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית ומעבר ביניהם (אלגברי, גרפי).	
היכרות עם ייצוגים אלגבריים שונים של פונקציה ריבועית (סטנדרטי, קודקודי, כמכפלה).	

מיומנויות	מושגים	נושאים	ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים
מציאת היתרונות של כל אחד מהייצוגים מעבר בין הייצוגים	פונקציה ריבועית נקודת מקסימום ציר סימטריה	הפונקציה הריבועית וייצוגיה האלגבריים השונים (ייצוג סטנדרטי וייצוג קודקודי)	
יצירת משוואות שקולות	נעלם משוואה פתרון של משוואה שקילות של משוואות	פתרון משוואה ריבועית ופתרון שאלות מילוליות	
זיהוי נקודות שנמצאות על גרף הפונקציה הריבועית	שיעורי נקודה נקודה שנמצאת על גרף הפונקציה נקודה שמקיימת את משוואת הפונקציה	משמעות אלגברית ומשמעות גרפית של נקודה הנמצאת על הגרף	
מציאת תכונות משותפות למשפחות של פונקציות ריבועיות	מתיחה כיוון שיקוף	משפחות של פונקציות ריבועיות (מתיחה, כיוון, שיקוף)	

ידע ומיומנויות מתמטיים הנלמדים (חדשים)
שלב הלמידה המומלץ

מבנה האשכול

	בעיית מטרה 2		בעיית מטרה 1	
	2.1.1		1.1.1	בעיות מדרגה 1

ארגון כיתה מומלץ פתרון בעיות המטרה יתבצע בקבוצות. אחרי העבודה בקבוצות ייערך דיון במליאה.

ניהול השיעור: המורה יאפשר לתלמידים לקרוא ולהבין את המידע הנתון, להתמודד עם בעיות המטרה בקבוצות, כשבאפשרותם להיעזר במדרגות. המדרגות מיועדות לשני הסעיפים של בעיית המטרה. המורה יעודד תלמידים שמתקשים להיעזר במדרגות, וידריך את התלמידים במקרה שישנן אי הבנות. יש לאפשר שימוש במחשבון.

- שאלות מומלצות לדיון כיתתי
- מה הקשר בין כדורסל לבין פונקציה ריבועית?
- תנו דוגמאות נוספות מחיי היום-יום למצבים בהם יש שימוש לפרבולה, למשל: גופים שנעים במסלול פרבולי.
- כמה פונקציות ריבועיות שונות עוברות דרך שתי נקודות נתונות (שאינן על ישר אחד)?
- כיצד משפיע סימנו של a (המקדם של x^2) על צורת הפרבולה?
- כיצד משפיע b (המקדם של x) על צורת הפרבולה?
- כיצד משפיע c (האיבר החופשי) על צורת הפרבולה?

- סרטונים ופעילויות לשילוב בפתיחה או בהמשך
- [YouTube - A basketball parabola](https://www.youtube.com/watch?v=...)
- [פעילויות לשעות תוספתיות לכיתה ט - המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי \(haifa.ac.il\)](https://www.haifa.ac.il/...)

מטרות והצעות לפתרון

מטרות האשכול:

- להראות שימושיות המתמטיקה במצבים מעולם הכדורסל.
- להיעזר בייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית כדי לתאר מסלול של כדורסל.
- למצוא פרבולות ומשוואות שלהן שמתארות מקרים בהם הכדור ייכנס/ לא ייכנס לסל.
- למצוא גובה מקסימלי אליו יכול הכדור להגיע (נקודת המקסימום של הפונקציה).

בעיית מטרה

המטרות של בעיות המטרה הן:

- לקשר בין מתמטיקה לכדורסל.
- למצוא ייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית על פי נקודות נתונות.
- למצוא הצגה פרמטרית של פונקציה ריבועית.
- להבין משמעות נקודת מקסימום.
- לחקור תפקיד של כל אחד מהפרמטרים בייצוגים שונים של פונקציה ריבועית.

בבעיית מטרה 1 מתואר מצב בו נתון מיקום הסל וכן הנקודה הגבוהה ביותר אליה הוא מגיע (נקודת המקסימום של הפונקציה הריבועית). התלמידים מתבקשים למצוא אפשרויות שונות לשיעורי הנקודה שאם השחקן ישחרר ממנה את הכדור אז הכדור ייכנס לסל. התשובה יכולה להיות על ידי מתן דוגמאות או על ידי הכללה.

בבעיית מטרה 2 נתונים שיעורי הנקודה שממנה משחרר השחקן את הכדור וכן שיעורי הנקודה שבה נמצא הסל. התלמידים מתבקשים למצוא אפשרויות שונות לגובה המקסימלי שאליו יכול להגיע הכדור. התשובה יכולה להיות על ידי מתן דוגמאות או על ידי הכללה.

פתרון לבעיית מטרה 1

נשתמש בייצוג קודקודי של פרבולה: $y = a(x - p)^2 + k$

מהנתון נובע כי נקודת הקודקוד הינה מקסימום, לכן: $a < 0$ ושיעוריה: $B(3, 41)$.

לכן, משוואת הפרבולה היא מהצורה: $y = a(x - 3)^2 + 41$

נציב את הנקודה $A(6, 32)$ המייצגת את מיקום מרכז הסל ונקבל $a = -1$.

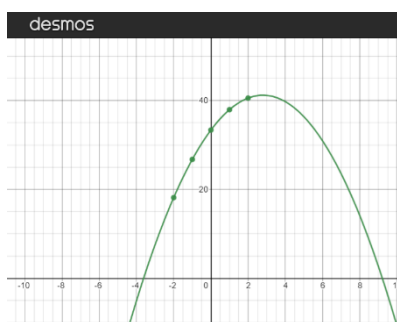
לכן, משוואת הפרבולה המתאימה היא: $y = -(x - 3)^2 + 41$

כל נקודה על הפרבולה עונה על הדרישה. חשוב לשים לב כי האפשרויות המתאימות לנקודה C כך שהכדור יכנס לסל הן אלו ששיעורי ה- x שלהן קטנים מ-3, אחרת זה לא הגיוני.

דוגמאות לנקודות שמהן ישחרר השחקן את הכדור והכדור ייכנס לסל:

$C(1, 37)$; $C(0, 32)$; $C(-1, 25)$; $C(-2, 16)$

אפשר להציע לתלמידים להשתמש בתוכנה לסרטוט גרפים למשל Desmos ולהיעזר בה למציאת שיעורי הנקודות המתאימות.



תלמידים שלא הצליחו להתמודד עם בעיית המטרה יפתרו את בעיית המדרגה.

בעיית מדרגה 1 לבעיית מטרה 1

פתרון בעיה 1.1.1

בעיה זו דומה לבעיה המוצגת בבעיית מטרה 1. יש שינוי בשיעורי הנקודות, כך שאחרי שפותרים בעיה זו כדאי לחזור לבעיית המטרה ולפתור אותה.

היישומון המוצע הוא למעשה "המדרגה" ובעזרתו ניתן למצוא את הייצוג האלגברי המתאים.

ביישומון מסומנות הנקודות $A(6, 29)$ ו- $B(3, 38)$ ונתונה פרבולה מהצורה

$$y = a(x - 3)^2 + 38 \text{ עם סרגל הזזה עבור } a.$$

התלמידים יכולים להזיז את סרגל ההזזה עד שיגיעו לביטוי של פרבולה שעוברת דרך הנקודה A. במקביל מוצג הביטוי האלגברי של הפרבולה.

משוואת הפרבולה המתאימה היא: $y = -(x - 3)^2 + 38$.

כל נקודה על הפרבולה עונה על הדרישה. חשוב לשים לב כי האפשרויות המתאימות לנקודה C כך שהכדור יכנס לסל הן אלו ששיעורי ה- x שלהן קטנים מ-3, אחרת זה לא הגיוני.

הנחיות ליישומון: בחרו מתוך ערכי a את הפונקציה הריבועית המייצגת את הפרבולה שעוברת דרך מיקום הסל.

פתרון לבעיית מטרה 2

בפתרון בעיה זו, התלמידים יכולים לתת דוגמאות ולא חייבים לתת את הייצוג הפרמטרי של משפחת הפונקציות המתאימה. להלן נציג פתרון פרמטרי ודוגמאות.

נשתמש בייצוג סטנדרטי של פרבולה: $y = ax^2 + bx + c$.

מהנתון נובע כי נקודת הקודקוד הינה מקסימום, לכן: $a < 0$.

כמו כן, הנקודה $C(0, 2)$ נמצאת על גרף הפונקציה. לכן, הפונקציה היא מהצורה: $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

נציב את הנקודה $A(6, 14)$ המייצגת את מיקום מרכז הסל ונקבל: $f(x) = ax^2 + (2 - 6a)x + 2$.

זוהי משפחה של פונקציות שעוברות דרך שתי הנקודות הנתונות.

למציאת הגובה המקסימלי שאליו יכול להגיע הכדור נשתמש בנוסחה: $y_{\text{קודקוד}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ונקבל: $y_{\text{קודקוד}} = -9a - \frac{1}{a} + 8$.

דוגמאות:

א. עבור $a = -1$ נקבל כי הפונקציה המתאימה היא: $y = -x^2 + 8x + 2$ והגובה המקסימלי שאליו יגיע הכדור הוא 18 יחידות אורך.

ב. עבור $a = -0.6$ נקבל את הפונקציה: $y = -0.6x^2 + 5.6x + 2$ והגובה המקסימלי שאליו יגיע הכדור הוא 15.07 יחידות אורך.

חשוב לשים לב כי הערכים המתאימים עבור a הם: $a < -\frac{1}{3}$. בנוסף, ערכי x האפשריים הם: $0 < x < 6$ על מנת להבטיח שנקודה B תימצא בין הנקודות A ו-C.

כאשר $a = -\frac{1}{3}$ הסל נמצא בגובה המקסימלי, כלומר נקודות A ו-B מתלכדות.

כאשר $-\frac{1}{3} < a < 0$, הסל נמצא לפני הגובה המקסימלי. כלומר, נקודה A נמצאת בין הנקודות C ו-B זה אינו מתאים לתיאור הסיטואציה.

הערה: אפשר לפתור גם על ידי שימוש בהצגה הקודקודית של הפונקציה הריבועית ואז מתקבלת משפחת הפונקציות:

$$f(x) = a \left(x - 3 + \frac{1}{a} \right)^2 + 2 - a \left(3 - \frac{1}{a} \right)^2$$

תלמידים שלא הצליחו להתמודד עם בעיית המטרה יפתרו את בעיית המדרגה.

בעיית מדרגה 1 לבעיית מטרה 2

פתרון בעיה 2.1.1

בעיה זו דומה לבעיה המוצגת בבעיית מטרה 2. אחרי שפותרים בעיה זו כדאי לחזור לבעיית המטרה ולפתור אותה.

היישומון המוצע הוא למעשה "המדרגה" ובעזרתו ניתן למצוא את הייצוג האלגברי המתאים.

כאן נתונות נקודות $A(6,14)$ ו- $C(0,2)$ ובשונה מאשר בבעיית המטרה נתון גם כי הגובה המקסימלי שאליו מגיע הכדור הוא 18 יחידות אורך.

ביישומון מסומנות הנקודות וגם מצוירת הפונקציה $f(x) = 18$.

כמו כן מצוירות 5 פונקציות כאשר יש תיבת בחירה להראות את הגרף או להסתיר. התלמידים יכולים לבחור כל אחד מהביטויים האלגבריים המוצגים ולבדוק האם מקיים את תנאי הבעיה. התשובות הנכונות נתונות בייצוגים שונים. חשוב לבקש מהתלמידים לנמק את בחירתם הן במקרים הנכונים והן במקרים השגויים.

דוגמה לנימוק	תשובה		
הנקודה $C(0,2)$ לא מקיימת את הביטוי האלגברי.	לא נכון	$y = -x^2 + 8x + 18$	א.
הביטוי הנתון חותך את ציר ה- x בנקודות $(6,0)$, $(14,0)$.	לא נכון	$y = -(x - 6)(x - 14)$	ב.
הנקודות A ו- C מקיימות את הביטוי האלגברי ושיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא 18.	נכון	$y = -(x - 4)^2 + 18$	ג.
הנקודה $C(0,2)$ לא מקיימת את הביטוי האלגברי.	לא נכון	$y = -(x - 6)^2 + 14$	ד.
הנקודות A ו- C מקיימות את הביטוי האלגברי ושיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא 18.	נכון	$y = -x^2 + 8x + 2$	ה.

הנחיות ליישומון: בחרו מתוך הביטויים המוצעים את הביטויים המתאימים לתיאור מסלול הכדור. סמנו V בתיבת הבחירה ובדקו אם הנקודות הנתונות נמצאות על המסלול שבחרתם.