

## אשכול: האנומליה של המים - צפיפות המים ופרבולה-חלק ב

אשכול ב מתוך 3 אשכולות.


מדעים	יחידה
ט'	כיתה מומלצת
45 דקות	משך הזמן המומלץ
מסה וצפיפות של חומרים, יחידות של מסה וצפיפות. קשר הקיים בין טמפרטורה לצפיפות. האנומליה של המים וביטוייה בתופעות שונות בטבע.	נושאים/מושגים חוץ מתמטיים הנלמדים באשכול (הקשר)
נושא	ידע מתמטי ומיומנויות מתמטיים נדרשים
גרפים ופונקציות	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- תחום של הפונקציה</li> <li>- השתנות של פונקציה</li> <li>- בקצב אחיד ובקצב לא אחיד</li> <li>- קנה מידה של מערכת צירים</li> <li>- נקודת מקסימום</li> <li>- תחום עליה</li> <li>- תחום ירידה</li> </ul>	
פונקציה ריבועית	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- קודקוד פרבולה</li> <li>- ציר סימטריה של פרבולה</li> <li>- תחום עליה</li> <li>- תחום ירידה</li> </ul>	
אומדן	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- רמת דיוק של מספרים רציונליים בייצוג עשרוני</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- צפיפות, מסה</li> <li>- נפח</li> <li>- יחידות של: מסה, נפח, צפיפות</li> <li>- גרף המתאר את השתנות צפיפות המים, בהתאם לטמפרטורה</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>בעיות אורייניות מתוך מציאות קרובה לתלמידים</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- מימונויות</li> <li>- הדגמה באמצעות טבלאות וגרפים כיצד פונקציה מתארת תופעה.</li> <li>- מהכרת הפונקציה הסקת מסקנות ותיאור של השתנות של תופעה.</li> <li>- קריאת גרף המדגים את תופעת האנומליה של המים.</li> <li>- מציאת ייצוג אלגברי לפונקציה ריבועית: ייצוג קודקודי, או ייצוג סטנדרטי. פתרון משוואה ריבועית.</li> <li>- אוריינות כמותית: חישוב, אומדן ועיגול מספרים לצורך פתרון בעיות</li> <li>- פתרון בעיות המשלבות בין הבנת טקסט מילולי והצגת נתונים הלקוחים מתוך המציאות, לביצוע החישובים המתאימים לפתרון הבעיות. מתן הסברים לתופעות טבע.</li> </ul>	

פתרון הבעיות שבאשכול דורש יישום ידע ומיומנויות במתמטיקה בהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך. הפתרון מוביל להעמקת ההבנה כיצד להיעזר במידע המוצג בטקסט ובמידע המוצג בגרף המתאר את השפעת הטמפרטורה על השינוי בצפיפות המים ובצפיפות הקרח, כדי להכיר ולהבין את תופעת האנומליה של המים.

פתרון הבעיות באשכול מאפשר להעמיק את הידע המתמטי בנושא הפונקציה הריבועית

מטרות האשכול

## מבנה האשכול

בעיית מטרה 1  בעיית מטרה 2-סיכום מה עוד אפשר לשאול?

1.1.1 בעיות מדרגה 1

1.2.1 בעיית מדרגה 2

## מערך דידקטי מומלץ:

- בפתיחת השיעור רצוי לשאול את התלמידים שאלות לגבי צפיפות חומרים והאנומליה של המים – כתזכורת למה שלמדו באשכול "האנומליה של המים-גרף צפיפות המים-חלק א".
- ארגון הכיתה: למידה בזוגות או בקבוצות.
- ציוד נדרש: מחשבון, מחשב כדי שניתן יהיה להפעיל את היישומון (לא הכרחי).
- ניהול השיעור: המורה יאפשר לתלמידים לפתור את הבעיות שבאשכול באופן עצמאי, כשבאפשרותם להיעזר במדרגות וביישומונים. המורה יעודד תלמידים שמתקשים להיעזר במדרגות, וידריך את התלמידים במקרה שישנן אי הבנות.
- המורה יבקש, מתלמידים שסיימו לפתור את הבעיות שבאשכול, להציע שאלה נוספת הקשורה לאשכול ולענות עליה.
- דיון בכיתה:
- התלמידים יציגו ויסבירו את תשובותיהם בדיון. רצוי לאפשר להם להציג דרכים שונות לפתרון. רצוי לדון בנקודות הבאות:
- כדי למצוא ביטוי אלגברי לפונקציה ריבועית- שיעורי כמה נקודות הנמצאות על הפרבולה צריכים להיות נתונים (להתייחס למקרים שונים)? זאת, לעומת קו ישר.
- אילו ייצוגים אלגבריים קיימים לפונקציה ריבועית?
- באיזה ייצוג רצוי לבחור לפתרון שאלה זו ומדוע?
- בהקשר לפתרון סעיף ג, לדון בשאלה באיזה ייצוג כדאי לנו להיעזר בפתרון המשוואה.
- יש לאפשר לתלמידים להציג את השאלות הנוספות שחשבו עליהן ולדון בפתרונות שהציעו.
- רצוי שהמורה יבחר, מבין שאלות התלמידים, את השאלות שלדעתו ראוי לדון בהן.
- אפשרות נוספת היא להציע לתלמידים להגיש את השאלות הנוספות ואת פתרונן כעבודת הגשה.

## מטרת מדרגה 1 לבעיית מטרה 1

### 1.1.1 בעיה

סעיף א של הבעיה במדרגה, מפנה את תשומת לב התלמיד לגרף. ממנו ניתן לדעת מהי הצפיפות המקסימלית של המים.

סעיף ב של הבעיה במדרגה, מטרתו להדגיש את הסימטריות של הפרבולה סביב הקדקוד. (כך שניתן להסיק שנתונות לנו 3 נקודות על הפרבולה: קדקוד הפרבולה, נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , והנקודה ששיעור ה- $x$  שלה הוא 8)

## מטרת מדרגה 2 לבעיית מטרה 1:

### 1.2.1 בעיה

מטרת מדרגה זו להזכיר לתלמיד מהם שלושת הייצוגים האלגבריים האפשריים לפרבולה, כדי שיבחר בייצוג המתאים ביותר כדי לחשב את הביטוי האלגברי של הפרבולה בבעיית מטרה 1.

### הצעות לפתרונות

#### בעיית מטרה 1

יש לשים לב להוראה "בתשובות מספריות לבעיות הבאות עליכם לתת תשובות עם דיוק של 6 ספרות אחרי הנקודה העשרונית" - זאת, גם כדי שניתן יהיה לבדוק את הפתרון בעזרת היישומון המצורף.

#### סעיף א

מציאת ביטוי אלגברי לפונקציה הריבועית  $f(t)$ .

הדרך העדיפה והפשוטה ביותר היא בעזרת הייצוג הקודקודי.

#### דרך א

באמצעות ייצוג קודקודי:

$$f(t) = a(t - 4)^2 + 1000$$

$$999.87 = a(0 - 4)^2 + 1000$$

$$a = -0.008125$$

$$f(t) = -0.008125(t - 4)^2 + 1000$$

ישנן דרכים נוספות למציאת ביטוי אלגברי לפונקציה הריבועית, כפי שמפורט בהמשך:

#### דרך ב

באמצעות ייצוג פולינומי:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

$$c = 999.87$$

$$t_{\text{קודקוד}} = 4 = \frac{-b}{2a}$$

$$b = -8a$$

$$1000 = 16a - 8a \cdot 4 + 999.87$$

$$a = -0.008125$$

$$b = 0.065$$

$$f(t) = -0.008125t^2 + 0.065t + 999.87$$

## דרך ג

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

$$c = 999.87$$

הצבת הקודקוד: (4,1000), ונקודה סימטרית לנקודה (0,999.87) שהיא: (8,999.87)

$$1000 = 16a + 4b + 999.87$$

$$999.87 = 64a + 8b + 999.87$$

$$a = \frac{-b}{8}$$

$$1000 = 2b + 999.87$$

$$b = 0.065$$

$$a = -0.008125$$

$$f(t) = -0.008125t^2 + 0.065t + 999.87$$

## סעיף ב

$$f(2) = \frac{\lambda''}{\mu''} 999.9675$$

$$f(10) = \frac{\lambda''}{\mu''} 999.7075$$

## סעיף ג

$$-0.008125(t - 4)^2 + 1000 = 999.48$$

$$(t - 4)^2 = \frac{999.48 - 1000}{-0.008125} = 64$$

$$t - 4 = 8 \text{ או } t - 4 = -8$$

$$t = 12 \text{ או } t = -4$$

$t = -4$  אינו נמצא בתחום הנתון, ולכן אינו מתקבל

ב-  $12^\circ\text{C}$  צפיפות המים היא בקירוב  $999.48 \text{ ק"ג/מ"ק}$

## בעיית מדרגה 1 למטרה 1

## בעיה 1.1.1

א. הצפיפות המקסימלית של המים היא  $1000 \text{ ק"ג/מ"ק}$ .

ב. כיוון שקודקוד הפרבולה הוא ב-  $t = 4$  אז  $f(8) = f(0) = \frac{\lambda''}{\mu''} 999.87$

## בעיית מדרגה 2 למטרה 1

### 1.2.1 בעיה

הביטויים המתאימים הם ג' ו-ה':

$$y = 4x^2 - 16x + 12$$

$$y = 4(x - 2)^2 - 4$$

רצוי לבקש מהתלמיד להסביר לגבי כל אחד מהביטויים האחרים - מה מתאים לפרבולה הנתונה ומה לא מתאים.

לדוגמה בביטוי  $(x - 1)(x - 3)$ , שיעור ה- $x$  של הקדקוד הוא 2, כמו בפרבולה הנתונה, אך שיעור  $y$  של הקדקוד לא מתאים וכן נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  אינה מתאימה.

הביטוי  $4(x - 1)(x - 3)$  מתאים לפרבולה הנתונה.

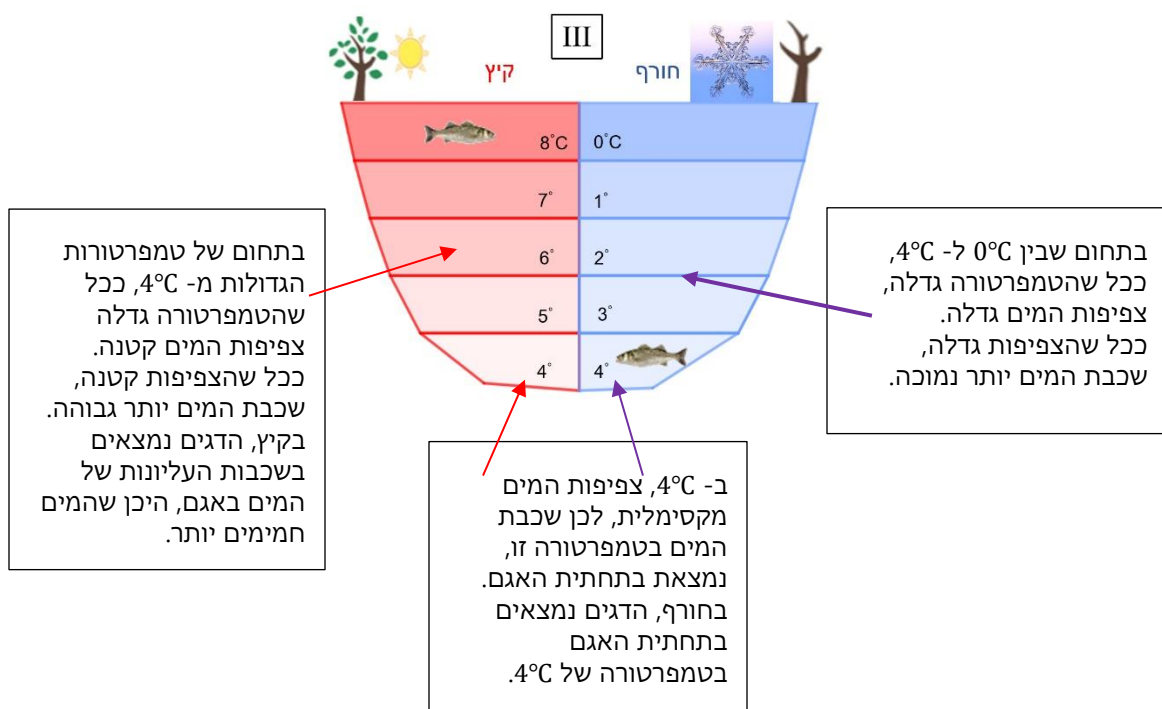
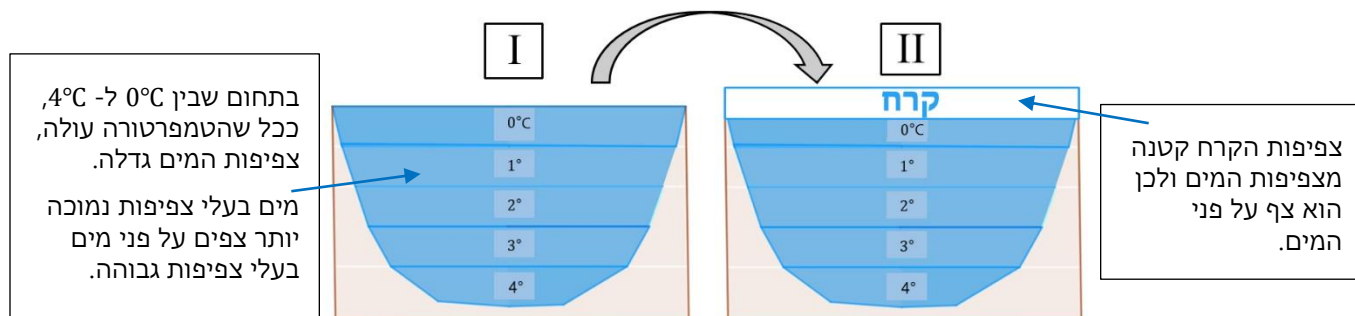
## בעיית מטרה 2 - סיכום

א. עקב האנומליה של המים בטמפרטורות שבין  $0^{\circ}\text{C}$  ל-  $4^{\circ}\text{C}$  ככל שהטמפרטורה גבוהה יותר צפיפות המים גדולה יותר. בתמונה I רואים ששכבת המים בטמפרטורה של  $4^{\circ}\text{C}$  היא בתחתית האגם כיוון שצפיפות המים בשכבה זו היא הגבוהה ביותר, שכבת המים בטמפרטורה של  $3^{\circ}\text{C}$  היא מעליה כיוון שצפיפות המים בטמפרטורה של  $3^{\circ}\text{C}$  קטנה מצפיפות המים בטמפרטורה של  $4^{\circ}\text{C}$  וכך הלאה. צפיפות המים בטמפרטורה של  $0^{\circ}\text{C}$  היא הקטנה ביותר ולכן הם מהווים את השכבה העליונה במימי האגם.

בתמונה II שכבת המים העליונה באגם קפאה והפכה לקרח. עקב האנומליה של המים צפיפות הקרח קטנה ביותר מ-8% מצפיפות המים ב-  $0^{\circ}\text{C}$  ולכן שכבת הקרח היא עליונה ומכסה את האגם.

הדגים בחורף יכולים לחיות בתחתית האגם היכן שהטמפרטורה של המים היא  $4^{\circ}\text{C}$  (תמונה III)

בקיץ המים מתחממים מעבר ל-  $4^{\circ}\text{C}$ . בטמפרטורות אלה ככל שהטמפרטורה גבוהה יותר צפיפות המים קטנה. השכבה העליונה באגם היא בטמפרטורה הגבוהה ביותר- כיוון שצפיפות המים בשכבה זו היא הקטנה ביותר. ובתחתית האגם שכבת המים בטמפרטורה של  $4^{\circ}\text{C}$  שצפיפות המים בה היא מקסימלית.



## מה עוד אפשר לשאול?

מהי צפיפות הקרח (בקירוב) ב-  $3^{\circ}\text{C}$  - ? (כחזרה וביסוס הידע על קו ישר)

**מידע נוסף:** כאשר הקרחון צף מעל פני המים, הוא משמש כמבודד בין הסביבה החיצונית לסביבה המימית ומונע שינויים דרסטיים בטמפרטורה כגון התחממות יתר או קפיאה. בקוטבי כדור הארץ ניתן לראות זאת באופן משכנע - לולא היו הקרחונים צפים מעל פני המים ומהווים שכבה מבודדת, היו כל המים קופאים כאשר מחוץ להם הייתה ירידה דרסטית בטמפרטורה, ובעלי חיים לא היו יכולים להתקיים בתוך המים.

### צפיפות המים

צפיפות המים מוגדרת כמשקל של יחידת-נפח של מים.

כידוע, עולה צפיפותם של נזלים עם ירידת הטמפרטורה עד נקודת הקיפאון. למים אנומליה במקרה זה, צפיפות המים המקסימלית היא ב-  $4^{\circ}$  וערכה אז הוא 1 גרם לסמ"ק מים, ובטמפרטורות נמוכות יותר הצפיפות יורדת עוד.

לשון אחרת - כאשר הטמפרטורה יורדת מתחת ל-  $4^{\circ}$ , נפח המים עולה, עד אשר ב-  $0^{\circ}$  הם קופאים לקרח - שצפיפותו קטנה ב- 10% בקירוב מצפיפות המים. חשיבותה של עובדה זו היא עצומה, אם נזכור שבגלל זה יצוף הקרח, הקל יותר, על פני המים. הדבר מאפשר המשך קיום החיים במים, מתחת לפני הקרח.

מקור: [צפיפות המים](#)

## הרחבה בנושא ריבוד המים באגמים ובכנרת:

[ריבוד אגמים](#)

[אגם הכינרת: זרמים פנימיים באגם](#)

[הכנרת](#)

[מקורות](#)

[האנומליה של המים](#)