פרספקטיבה אשכול ג' – עמודי תאורה במרחקים שווים

אשכול פרספקטיבה 3 – מתוך 5 אשכולות

יחידה	אמנות
כיתה מומלצת	ט - י
משך הזמן המומלץ	45 דקות
נושאים/מושגים חוץ מתמטיים הנלמדים באשכול (הֶקשר)	שימוש בעקרונות של פרספקטיבה חד-מגוזית בציור.

ידע מתמטי ומיומנויות מתמטיים נדרשים

נושאים	מושגים	מיומנויות
מצבים הדדיים בין ישרים: ניצבות והקבלה	ישרים מקבילים ישרים מאונכים	זיהוי וסרטוט של ישרים מקבילים וישרים מאונכים.
טרפז		זיהוי טרפזים ושימוש בהגדרה
דמיון משולשים		זיהוי של משולשים דומים בהסתמך על משפט דמיון ז.ז, הסקת מסקנות מהדמיון.
משפט תאלס		

מטרות האשכול

1. להכיר את עקרונות הפרספקטיבה החד-מגוזית בציור של אובייקטים בעלי גובה זהה, הנמצאים במרחקים שווים זה מזה.
2. להשתמש במושגים גיאומטריים כדי להוכיח את תקפות הבנייה כפי שבאה לידי ביטוי בציור.

ידע מתמטי ומיומנויות מתמטיים נלמדים (חדשים)	(רשות) ממוצע הרמוני של שני גדלים.
שלב הלמידה המומלץ	אפשרי בכיתה ט, לאחר למידת הנושא "טרפז", ו/או בכיתה י, לאחר שלמדו דמיון משולשים.

תפקידי המדרגות:

מדרגה 1	התמקדות בהוכחה בהינתן סרטוט גיאומטרי
מדרגה 2	חזרה קצרה על עקרונות הפרספקטיבה החד-מגוזית
מדרגה 3	פתרון בהינתן סרטוט גיאומטרי והוכחה חלקית

מבנה האשכול

בעיית הקדמה		V
בעיית מטרה		V
בעיית מדרגה 1	1.1	
בעיית מדרגה 2	2.1	
בעיית מדרגה 3	3.1	

ארגון כיתה מומלץ

- למידה בזוגות או בקבוצות
- מומלץ לפתוח את השיעור בהיכרות/ חזרה על מושגים עיקריים של פרספקטיבה חד-מגוזית. לשיקול דעת של המורה אם להתחיל מבעיית ההקדמה או ישר לגשת לפתרון של בעיית המטרה. לפני בעיית המטרה כדאי שתלמידים יכירו את השיקולים הגיאומטריים שמאחורי הציור, המוצגים ב"תיאור סיטואציה".
- במידה והתלמידים נחשפים לבעיית ההקדמה, כדאי לדון בדרכים שונות לפתרון ולהנמקות לתקפות או אי-התקפות של הבנייה המוצעת על ידי התלמידים.
- המורה יאפשר לתלמידים לענות על השאלות באשכול באופן עצמאי, כשהם יכולים להיעזר במדרגות וביישומונים. המורה יעודד תלמידים שמתקשים להיעזר במדרגות, לשתף פעולה, ולהדריך את התלמידים במקרה שישנן אי הבנות.
- המורה יערוך דיון כיתתי סביב השאלות שעלו במהלך הפתרון של השאלות באשכול. לפי שיקול דעת של המורה אם כדאי לערוך דיוני ביניים במידה ומזהה קושי.

שאלות מומלצות לדיון כיתתי

- תארו דרכים גיאומטריות שונות לציור של עמוד התאורה השלישי בשורה, כאשר הצייר עומד מול העמוד השמאלי ונמקו.
- אילו מהדרכים שהצעתם, מאפשרות לצייר את העמוד שלישי לפי עקרונות הפרספקטיבה חד-מגוזית כאשר הצייר נמצא במקום אחר? בססו את קביעתכם על שיקולים גיאומטריים, שמבוססים על הגדרות ומשפטים שלמדתם.

בעיית הקדמה

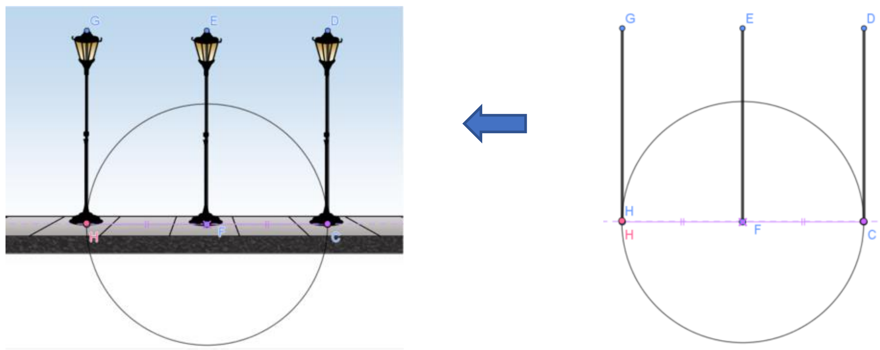
הבעיות באשכול זה מתייחסות לציור של עמודי תאורה שנמצאים במרחקים שווים (כל העמודים בעלי גובה זהה). בעיית ההקדמה מציגה ציור חלקי של שני עמודי תאורה ועל הצייר לצייר את העמוד השלישי משמאל. בבעיה רשום כי בעת היצירה הצייר עומד מול העמוד השמאלי. הבעיה מזמנת את התלמידים להציע דרכים שונות לבניית העמוד השלישי תוך שימוש ביישומון, בו יש מאגר כלים לבנייה. על התלמידים לבנות ולהוכיח כי הבנייה שהציעו הינה תקפה.

שימו לב, ייתכן והתלמידים יעשו הכללות יתר בהסתמך על אובייקטים המופיעים בציור. למשל, תלמידים אחדים עשויים לחשוב כי הנקודות המסומנות על עמודי התאורה הן נקודות אמצע (וזה לא נכון). זאת הזדמנות לדון עם התלמידים על כך שלא ניתן להסתמך על העין, אלא רק על הנתונים המוצגים במשימה.

הצעות לפתרונות אפשריים באמצעות היישומון:

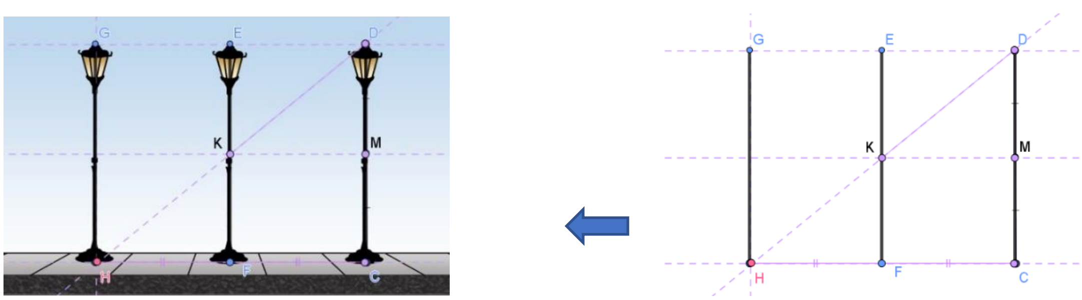
אפשרות 1

1. לסרטט קווים מקבילים FC||DE (ניתן להשתמש בכלי של קו אופקי ).
קצוות העמוד HG יהיו על הישרים האלה.
2. לסרטט מעגל באמצעות מרכז (F) ונקודה על המעגל (C). בנייה כזו מאפשרת באופן מיידי, למצוא את המיקום של הנקודה H על הישר FC. נקודה זו מסמנת את מיקום העמוד השלישי בשורה.
FH =FC - רדיוסים במעגל.
3. לסרטט דרך הנקודה H ישר מאונך ל-CF (ניתן להשתמש בכלי של קו אנכי ).
הנקודה G הינה נקודת החיתוך של הקו האנכי שסורטט ושל הישר DE.
4. התקבל קטע GH שמייצג את העמוד השלישי ומקיים:
$CD = EF = GH$-ו $FH = FC$,$GH \perp FC$

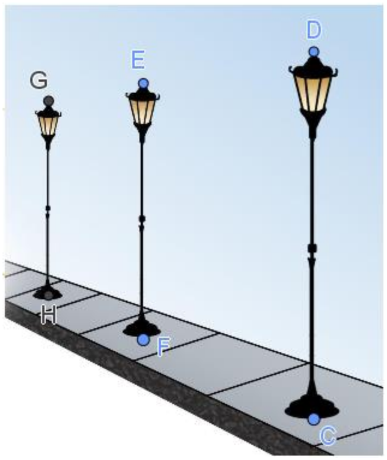


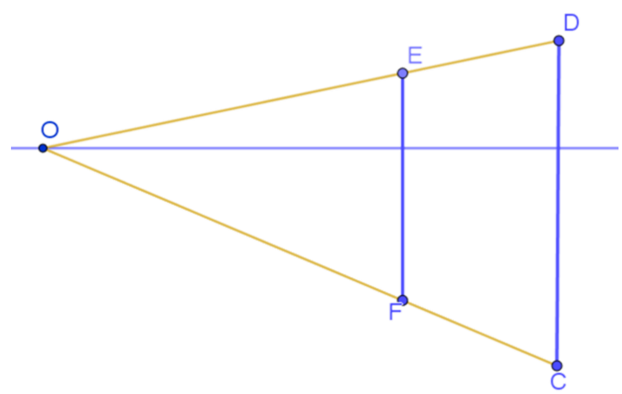
אפשרות 2

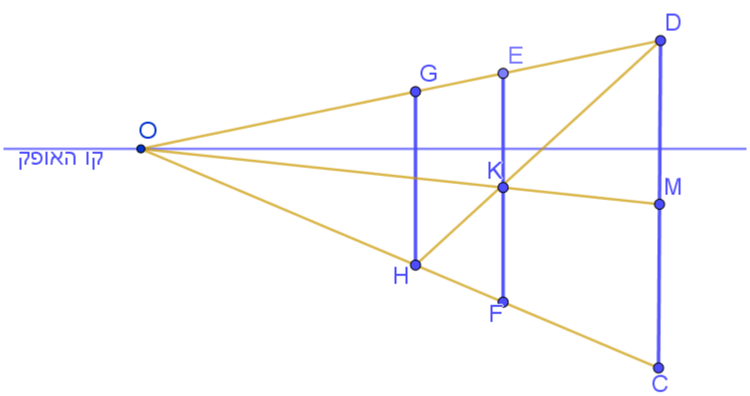
1. לסרטט קווים מקבילים FC||DE (ניתן להשתמש בכלי )
2. לסמן נקודה M כאמצע הקטע CD ולסרטט MK||DE (ניתן להשתמש בכלי ).
הנקודה K היא אמצע הקטע EF. התלמידים צריכים להוכיח טענה זו. למשל,
   - התלמידים עשויים להסתמך על כך ש-MK||DE ולכן כל הנקודות על הישר DE נמצאותבאותו מרחק מהישר MK. ולכן DM=EK.
   - תלמידים אחרים עשויים לזהות כי המרובע KEDM הוא מלבן ולהסתמך על תכונה של מלבן: במלבן צלעות נגדיות שוות. נתון כי $EF = CD$ (עמודי התאורה בגובה זהה).
3. לסרטט קו ישר DK. קו זה יחתוך את CF בנקודה H. נקודה זו מסמנת את מיקום העמוד השלישי בשורה.
כעת נשאר להוכיח כי $HF = FC$. למשל, באמצעות חפיפת משולשים DEK ו-HFK או באמצעות קטע אמצעים במשולש DHC, או באמצעות שטחים.



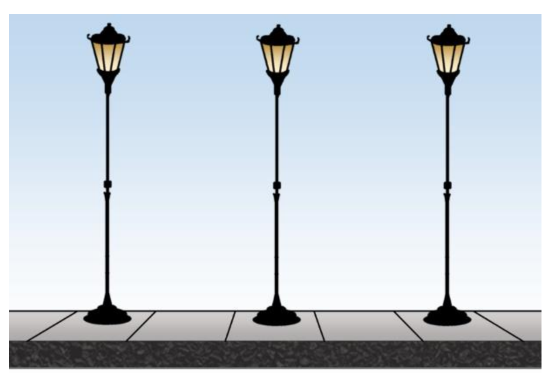
לאחר בעיית ההקדמה, התלמידים נפגשים עם ציור של אותם עמודי התאורה – רק שהפעם **הצייר** לא נמצא מול העמוד השמאלי, אלא **זז הצידה** (ימינה מהעמוד הראשון המסומן ב- CD). עליו לצייר את העמוד השלישי בהסתמך על הכללים של פרספקטיבה חד-מגוזית. *בתיאור סיטואציה* מוצג אופן הציור - מומלץ לדון עם התלמידים על אופן הבנייה המוצג, לפני שניגשים לפתרון של בעיית המטרה. אם אופן בנייה זה (אפשרות 2) לא עלה בפתרון של בעיית ההקדמה, דיון סביב בנייה זו יערך בבעיית המטרה.

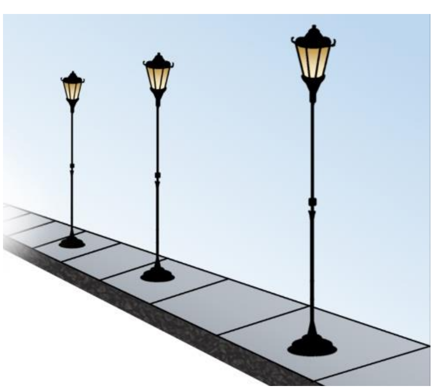






בבעיית המטרה על התלמידים לזהות את מיקום הצייר בעת היצירה של כל אחד מהציורים ולבנות את העמוד השלישי בהסתמך על ההסבר המוצג בתיאור הסיטואציה. השאלה המאתגרת היא להוכיח כי הבנייה בשני הציורים תואמת את המציאות. (הוכחה אפשרית לגבי ציור front מוצגת למעלה).





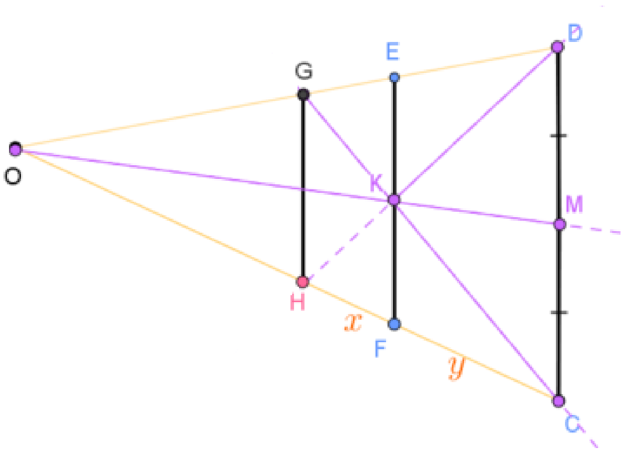
שלבי ההוכחה:

(1) K אמצע הקטע EF

(2) $\frac{EF}{GH}=\frac{2y}{x+y}$

(3) $\frac{EF}{GH}=1 \Leftrightarrow x=y$

כלומר, הבנייה תואמת את המציאות.



הוכחה אפשרית:

(1) לפי הבנייה מתקיים כי CD||FE ⇐

(1.1) $\Delta OEK\sim\Delta ODM$ (לפי משפט דמיון ז.ז) ולכן $\frac{OK}{OM}=\frac{EK}{DM}$

(1.2) $\Delta OKF\sim\Delta OMC$ (לפי משפט דמיון ז.ז) ולכן $\frac{OK}{OM}=\frac{KF}{CM}$

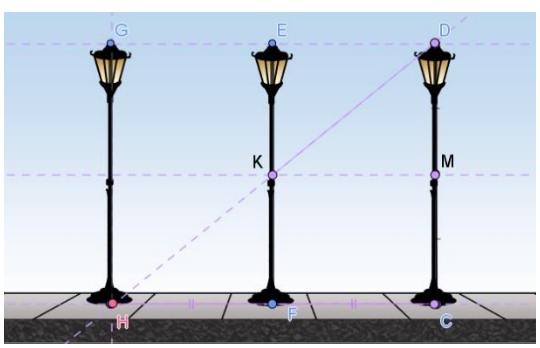
(1.3) מ- (1.1) , (1.2) ומהנתון שהקטע OM הוא תיכון, נובע כי $FK=KE$.

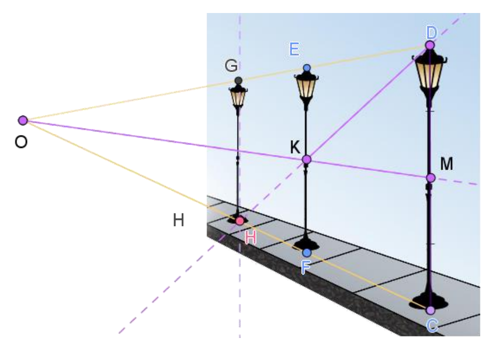
(2) מהנתון $FE||HG$ נובע כי: $\Delta CFK\sim\Delta CHG$ (לפי משפט דמיון ז.ז) ⇐ $\frac{FK}{HG}=\frac{CF}{CH}=\frac{y}{x+y}$

כיוון ש-$FK=KE$ לכן מתקיים כי $\frac{EF}{GH}=\frac{2y}{x+y}$.

מדרגה 1

במדרגה זו על התלמידים לתרגם את הסיטואציה למצב גיאומטרי הנתון (ללא צורך בבניה) ולהתמקד בהוכחה בלבד.





מדרגה 2

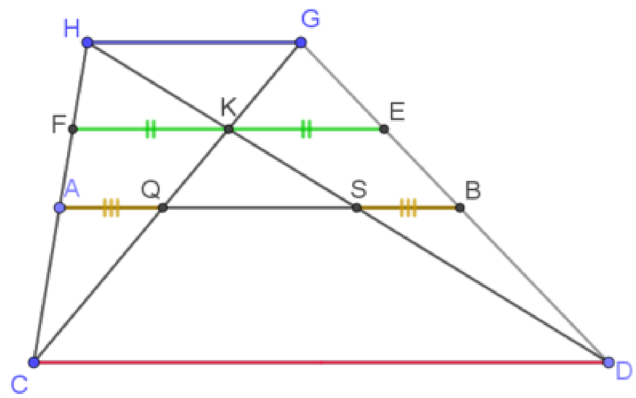
הבעיה המוצגת במדרגה זו מחזירה את התלמידים לעקרונות של פרספקטיבה חד-מגוזית בנוגע ליחסי הגדלים של האובייקטים והמרחקים ביניהם. על התלמידים להיזכר כי עצמים שווים בגודלם במציאות, ייראו בציור קטנים יותר, ככל שהם רחוקים יותר.

מדרגה 3

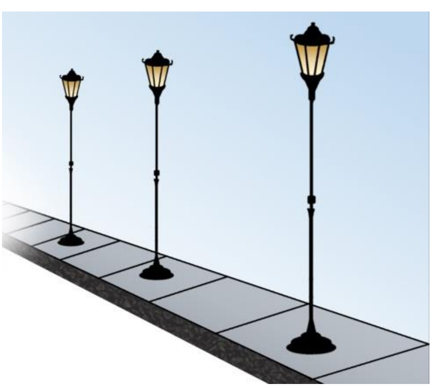
במדרגה זו מוצגת הוכחה חלקית של בעיית המטרה ועל התלמידים להבין את הרעיון ולהשלים את ההוכחה.

מה עוד אפשר לשאול?

1. בבעיית המטרה הוכחנו, בהסתמך על הנתונים, כי $\mathrm{FK} = \mathrm{KE}$. לשיקול דעת של המורה:
   - האם להתייחס למצב כשאין נתון על אמצע הקטע CD ועדיין מתקיים כי $\mathrm{FK} = \mathrm{KE}$.
   - האם להתייחס למצב שבו קו מקביל לבסיסי טרפז אינו עובר דרך נקודת החיתוך אלכסוניו.



2. לשיקול דעת של המורה האם לחשוף את התלמידים למושג ממוצע הרמוני של שני מספרים ולבטא את אורך הקטע העובר דרך נקודת חיתוך האלכסונים והמקביל לבסיסי הטרפז באמצעות אורכי הבסיסים: $\mathrm{FE} = \frac{2 \cdot HG \cdot CD}{HG + CD}$. בכך, למעשה, להוכיח את התכונה: הקו המקביל לבסיסי טרפז ועובר דרך נקודת מפגש האלכסונים הוא ממוצע הרמוני של בסיסי הטרפז.



3. לשיקול דעת של המורה האם להפנות את תשומת ליבם של התלמידים לאובייקט נוסף שנמצא בציור - הקרקע. דהיינו, כיצד עקרונות הפרספקטיבה החד-מגוזית באים לידי ביטוי בציור האריחים (הבלטות) עליהם עומדים שלושת עמודי התאורה.